کاربرد اریگامی در حل مسائل ریاضی

آسیه رضایی گرجی
دبیر ریاضی شهرستان کرج

اشاره

اریگامی تکنیک استفاده از «تا» است و به کمک آن با ایجاد تاهای گوناگون، شکل‌های جالب و شگفت‌انگیزی می‌توان ایجاد کرد. اریگامی در درک مفاهیم ابتدایی و حتی پیچیدهٔ ریاضی کمک شایانی به ما می‌کند. مفاهیمی که در ریاضیات، مجرد و محض به‌نظر می‌رسند، به کمک اریگامی شهودی‌تر و قابل فهم‌تر می‌شوند. روش مورد استفاده در این مقاله استفاده از اصول اولیهٔ اریگامی است. با استفاده از این اصول می‌توانیم به ارتباط ریاضیات و اریگامی و حل بعضی مسائل ریاضی، مانند حل معادلات درجهٔ ۲ و ۳ بپردازیم. آموزش مفاهیم هندسه و ریاضی، مانند تقارن و بسیاری از مفاهیم پیچیده‌تر را با کمک اریگامی، بسیار جذاب‌تر و به‌طور عملی و کاربردی می‌توانیم انجام دهیم.

کلیدواژه‌ها: اریگامی، تا، ریاضی، آموزش.

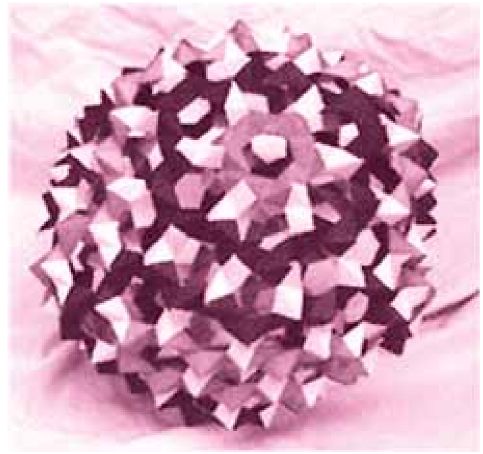
مقدمه

کلمهٔ «Origami» متشکل از دو کلمهٔ «ori» و «gami» است که به‌ترتیب به معنای «تا» و «کاغذ» است. هنر اریگامی، یعنی هنر کاغذ و تا و این یعنی، اریگامی پایهٔ هندسی دارد و از همین‌جا به رابطهٔ عمیق بین این دو پی می‌بریم. روش ساخت کاغذ نخستین‌بار در چین در حدود سال ۱۰۰ میلادی ابداع شد، به‌همین دلیل عده‌ای معتقدند که این هنر ابتدا در چین به‌وجود آمد و سپس به ژاپن راه یافت. در حدود قرن ششم میلادی این صنعت توسط راهبان بودایی از چین به ژاپن وارد شد. سپس در اواسط قرن هشتم میلادی و پس از تسلط اعراب مسلمان بر آسیای مرکزی، این صنعت توسط آنان به نقاط دیگر برده شد. در قرن دهم میلادی به مصر و در قرن دوازدهم میلادی به اسپانیا رسید. پس از ورود اعراب به سیسیل، این صنعت وارد ایتالیا شد و کارگاه‌های کاغذسازی در ۱۲۷۶ در «فابرینوی ایتالیا» و در ۱۳۴۸ در «تروی فرانسه» آغاز به‌کار کردند. در قرن‌های چهاردهم تا شانزدهم میلادی اریگامی مدرن به‌گونه‌ای اصولی در ژاپن نوشته شد.

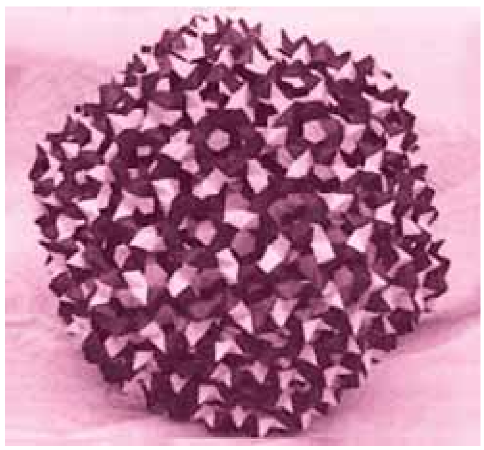
پروفسور **تام هال**، یکی از دانشمندان رشتهٔ ریاضی دانشگاه «رود آیلند»[۱] است. تز او در فهرست رنگ‌آمیزی نقشه‌های هندسی بود. وی در حال حاضر به بررسی ریاضی اریگامی اشتغال دارد. (کاغذهای تاشو). تصویرهای ۱ تا ۳ مکان‌هایی هستند که براساس اریگامی ساخته شده‌اند و نمونه‌ای از کارهای پروفسور تام هال را نشان می‌دهند.

تصویر ۱ ساختمان کتابخانه عمومی شهر سیاتل

در هندسه با استفاده از خط‌کش و پرگار نمی‌توانیم یک زاویه را به سه قسمت تقسیم کنیم، در حالی‌که این کار با چندبار تازدن به سادگی انجام می‌شود



تصویر ۲ **این یک باکی‌بال (Buckyball) کروی‌مانند است که از ۳۶۰ تا پنج‌ضلعی زیگ‌زاگی ساخته شده است.**



تصویر ۳ **این هم یک باکی‌بال دیگر است که از ۸۱۰ پنج‌ضلعی ساخته شده است.**

رابرت لنگ، دانشمند آمریکایی، به‌عنوان یک فیزیک‌دان برجسته در زمینهٔ لیزر شناخته می‌شود. اما شهرت او بیشتر به‌خاطر اریگامی است. لنگ به‌عنوان دانشمند، تحقیقات زیادی روی جنبه‌های علمی و مهندسی اریگامی انجام داده است. یکی از تخصص‌های لنگ، طراحی اریگامی شکل‌های پیچیده (به‌خصوص حشرات و حیوانات) است که گاه بیشتر از ۱۰۰ مرحله دارند. او تا به حال هشت کتاب و تعداد زیادی مقاله دربارهٔ اریگامی منتشر کرده است. اریگامی هنری قدیمی است، اما امروزه دانشمندان و افراد بسیاری مانند رابرت لنگ و تام هال مشغول ساخت محصولات جدیدی با استفاده از این هنر هستند.

ما به‌طور معمول برای رسم سازه‌های ریاضی، به‌خصوص مباحث موجود در هندسه، از خط‌کش و پرگار استفاده می‌کنیم. اما در هندسه با استفاده از خط‌کش و پرگار نمی‌توانیم یک زاویه را به سه قسمت تقسیم کنیم، در حالی‌که این کار با چندبار تازدن به سادگی انجام می‌شود. دو برابر کردن حجم یک مکعب و حتی حل معادلات جبری نیز به کمک اریگامی انجام‌پذیر است. در اریگامی از ابزارهایی مانند، خط‌کش، پرگار، مداد و بسیاری از ابزارهایی که در ریاضیات استفاده می‌کنیم، به‌هیچ عنوان نمی‌توانیم استفاده کنیم. ساختار خط‌کش و پرگار براساس انتخاب چند نقطه یا خط یا پاره‌خط اختیاری روی یک صفحه است. در اریگامی نیز به کمک تاها می‌توانیم نقاط و خطوط مورد نیاز را بیابیم. ممکن است این سؤال به ذهنمان خطور کند که: چه نوع تاهایی در اریگامی مدنظر ما باید باشد؟ تاهایی که مستقیم و بدون هیچ انحنایی باشند، زیرا دربارهٔ تاهایی که دارای انحنا هستند و راست نیستند، اطلاعات زیادی نداریم. از تاهایی با طول‌های زیاد و در امتداد مجموعهٔ خطوط صاف که در یک زمان انجام می‌شوند نیز اجتناب می‌کنیم. زیرا این نوع از تاها باعث پیچیدگی زیاد در حل مسائل می‌شوند. پس به‌دلیل ارتباطی که بین اریگامی و هندسه وجود دارد، مقایسهٔ این دو، چیز عجیبی نخواهد بود.

در این مقاله دربارهٔ اصول به‌کار رفته در اریگامی و کاربرد این اصول صحبت می‌شود. دیده می‌شود که به کمک این اصول حتی می‌توانیم به حل معادلات درجهٔ ۲ و ۳ بپردازیم. یعنی رابطه‌ای بین اریگامی و ریاضیات وجود دارد.

اصول اولیهٔ اریگامی

در هندسه اصولی وجود دارند که اساس این علم را تشکیل می‌دهند. مشابه اصول هندسه، در اریگامی نیز اصولی داریم. فرایند کاغذ و تا هفت اصل ساده دارد. شش اصل اول به‌وسیلهٔ دانشمند هسته‌ای، به‌نام **هامیاکی هوزیتا**[۲] مطرح شد که تا به امروز قوی‌ترین اصول شناخته شده‌اند. هفتمین اصول به‌وسیلهٔ **جاکوبز جاستین**[۳] در سال ۱۹۸۹ ارائه شد. این اصل‌های هفت‌گانه عبارت‌اند از:

اصل ۱. دو نقطهٔ P_1 و P_2 مفروض‌اند. یک تا را که از بین دو نقطه می‌گذرد، می‌توان انجام داد.

اصل ۲. دو نقطهٔ P_1 و P_2 مفروض‌اند. با یک تا می‌توان P_1 را روی P_2 جای داد.

اصل ۳. دو خط L_1 و L_2 مفروض‌اند. با یک تا می‌توان L_1 را روی L_2 جای داد.

اصل ۴. نقطهٔ P_1 و خط L_1 مفروض‌اند. با یک تا می‌توان خطی بر L_1 عمود کرد که از P_1 بگذرد.

اصل ۵. نقـــاط P_1 و P_2 و خـــط L_1 مفـروض‌اند. با یک تـــا می‌توان P_1 را روی خـــط L_1 قرار داد و از P_2 نیز گذشت.

اصل ۶. نقـاط P_1 و P_2 و دو خـط L_1 و L_2 مفروض‌انـد. با یک تا می‌توان P_1 را روی خط L_1 و P_2 را روی خط L_2 قرار داد.

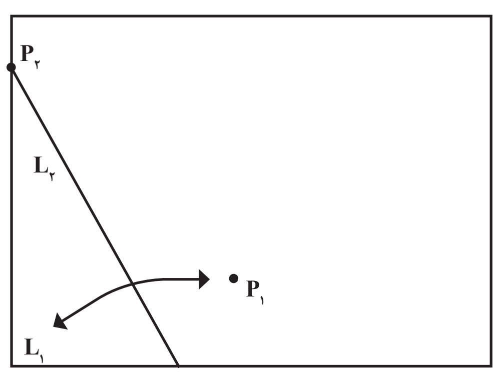
اصل ۷. نقطهٔ P و دو خط L_1 و L_2 مفروض‌اند. با یک تا می‌توان P را روی خط L_1 قرار داد، به‌طوری که بر خط L_2 عمود باشد.

ترسیـــم دقیق با خط‌کش و پـــرگار، توانایی ما را در حل مسائلی نظیر، تقسیم کردن یک زاویه به سه بخش مساوی، یا دو برابر کردن حجم یک مکعب، یا ترسیم یک خط با طول $\sqrt[3]{2}$ و مســـائلی مشابه، محدود می‌کند، اما با کمک تکنیک‌های موجود در اریگامی بســـیاری از این مسائل را می‌توان حل کرد.

تکنیک‌های مفید اریگامی

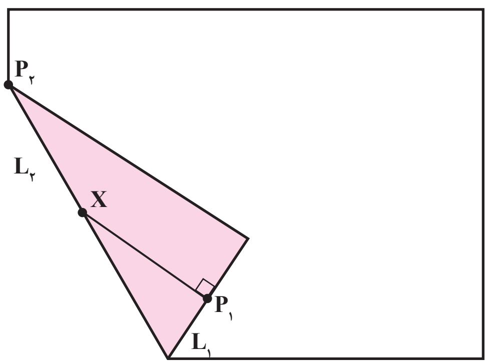
با کمک اصل‌های موجود در اریگامی و تکنیک‌های به‌کار رفته در آن، می‌توانیم بســـیاری از مســـائل موجود در ریاضیات و حتی مســـائل مشکل و حل نشده را حل کنیم. اصل‌های ۱ تا ۴ به راحتی قابل بررسی هستند. در اینجا به بررســـی اصل ۵ می‌پردازیم. با کمک این اصل، می‌توانیـــم رابطه‌ای را که بین ریاضیات و اریگامی وجود دارد، ببینیم.

ابتدا کاغـــذی را مطابق شـــکل۴ در نظر می‌گیریم.



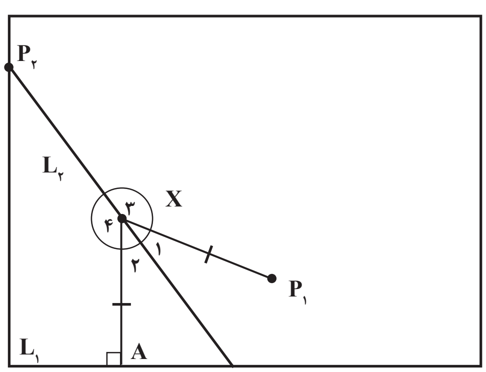
شکل۴

فرض کنید L_1 خطی باشـــد کـــه ضلع پایین کاغذ ما را تشـــکیل می‌دهد. حـــال به اجرای اصـــل ۵ می‌پردازیم. مطابـــق شـــکل ۴، از نقطهٔ P_2 کاغذ را تـــا می‌زنیم تا P_1 روی L_1 قرار گیرد. خط تای کاغذ را L_2 می‌نامیم. طبق اصل ۴، نقطهٔ P_1 و خط L_1 را در نظر می‌گیریم، از نقطهٔ P_1 می‌توانیم یک خط عمود بر قسمت تا شدهٔ L_1 رسم کنیم. فرض می‌کنیم X نقطه‌ای باشـــد که این خط در این نقطه، خط L_2 را قطع می‌کند (شکل۵).



شکل۵

با باز کردن صفحه بعـــد از تا زدن، پاره‌خط XP_1 و پاره‌خطی که از X به L_1 عمود رســـم شده را می‌بینیم. پس X نقطه‌ای روی L_2 است که دارای فاصلهٔ مساوی از P_1 و L_1 است. با توجه به تعریف سهمی، این نقطه روی یک سهمی با کانون P_1 و هادی L_1 قرار دارد. طبق اصل ۳، چون بـــا خط تای L_2، XA روی XP_1 قرار می‌گیرد. این یعنی L_2 نیم‌ساز زاویهٔ $A\hat{X}P_1$ است (مطابق شکل ۶، $\widehat{X_1}=\widehat{X_2}$). از طـــرف دیگر، چون فاصلهٔ X از P_1 و A به یک اندازه است، می‌توانیم نتیجه بگیریم، هر نقطه روی L_2 از A و P_1 به یک فاصله اســـت. زیرا کافی است یک نقطه مانند Y را بین X و P_2 انتخاب کنیم.

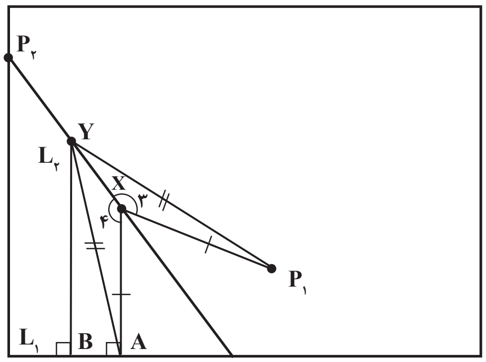


شکل۶

با کمک اصل‌های موجود در اریگامی و تکنیک‌های به‌کار رفته در آن، می‌توانیم بسیاری از مسائل موجود در ریاضیات و حتی مسائل مشکل و حل نشده را حل کنیم

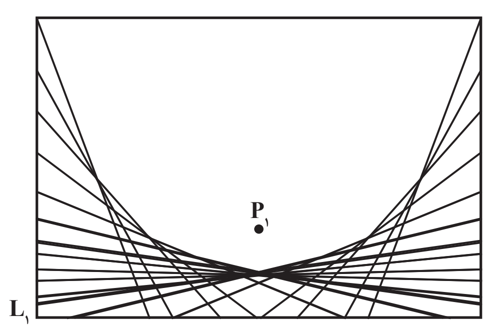
مطابق شکل ۷، دو مثلث XYA و XYP_1 با یکدیگر هم‌نهشت هستند، زیرا داریم:

$$\overline{YA}=\overline{YP_1},\ \overline{XY}=\overline{XY},\ \widehat{X_3}=\widehat{X_4}$$



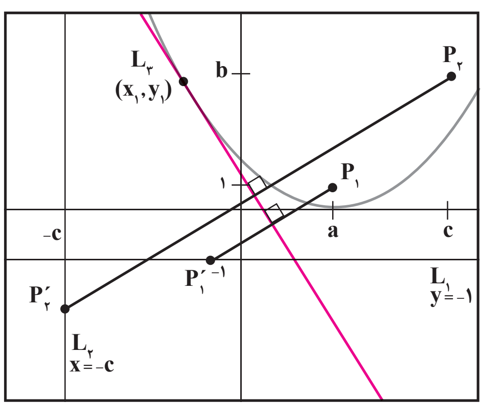
شکل ۷

پس داریم: $\overline{YA}=\overline{YP_1}$. با توجه به اصل ۴، خطی را که از Y می‌گذرد و بر L_1 عمود است، رسم می‌کنیم. با توجه به شکل ۷، مثلث YBA قائم‌الزاویه است. بنابراین: $\overline{YB}<\overline{YA}=\overline{YP_1}$ و این یعنی Y روی سهمی با کانون P_1 و هادی L_1 قرار ندارد. با توجه به اینکه همهٔ نقاط روی سهمی، باید به یک فاصله از خط هادی و کانون P_1 سهمی باشند، پس سهمی با کانون P_1 و L_1، بالای خط L_2 در این نقطه، یعنی نقطهٔ X، قرار دارد. به‌طور مشابه می‌توانیم برای هر نقطه روی L_2 درستی این مطلب را نشان دهیم که از X تا L_1 به یک فاصله است. بنابراین خط L_2 خط مماس بر سهمی در نقطهٔ X است. برای درک بهتر این مسئله باید نقاط زیادی را در طول ضلع‌های چپ و راست کاغذتان برای نمایش P_2 انتخاب کنید. برای مشخص کردن طرح و شکل‌بندی سهمی برای هر یک از نقاط مورد نظر، اصل ۵ را اجرا کنید. با توجه به اینکه سهمی یک معادلهٔ درجهٔ دوم است، به کمک این اصل به یکی از روابطی که بین ریاضیات و اریگامی وجود دارد، پی می‌بریم.



شکل ۸

حال به بررسی اصل ۶ و چگونگی کمک این اصل به حل یک معادلهٔ درجهٔ سوم می‌پردازیم. فرض می‌کنیم معادله‌ای مانند $x^3+ax^2+bx+c=0$، معادلهٔ درجهٔ ۳ ما باشد. فرض کنید P_1 نقطه‌ای در بازهٔ $(a,1)$ و P_2 در بازهٔ (c,b) باشد. با توجه به دو نقطهٔ P_1 و P_2، خط L_1 به معادلهٔ $y+1=0$ و خط L_2 به معادلهٔ $x+c=0$ تعریف می‌شوند. طبق اصل ۶ با یک تا، P_1 را روی خط L_1 و P_2 را روی خط L_2 قرار می‌دهیم و این خطِ تا را L_3 می‌نامیم. چون این خطِ تا موازی با محورهای مختصات نیست، پس دارای معادله‌ای به‌صورت $y=tx+u$ خواهد بود. با توجه به آنچه در بررسی اصل ۵ مطرح شد، خط L_3 خط مماس بر سهمی با کانون P_1 و هادی L_1 است. و نیز با توجه به مختصات $P_1(a,1)$ و خط هادی به معادلهٔ $L_1: y+1=0$، می‌توانیم معادلهٔ سهمی را به‌صورت $4y=(x-a)^2$ (۱) داشته باشیم.



شکل ۹

فرض کنید (x_1,y_1)، نقطه‌ای روی L_3 باشد که L_3 در این نقطه بر سهمی فوق مماس باشد. پس داریم: $4y_1=(x_1-a)^2$. شیب خط مماس، همان مشتق در نقطهٔ تماس است. پس با توجه به اینکه این مشتق برابر $y'=\frac{1}{2}(x-a)$ (۲) است، پس شیب خط مماس برابر $t=\frac{1}{2}(x_1-a)$ (۳) است. با استفاده از شیب به‌دست آمده می‌توانیم نقطهٔ تماس و معادلهٔ خط را به‌صورت $y-y_1=\left[\frac{1}{2}(x_1-a)\right](x-x_1)$ بنویسیم. پس از بازنویسی داریم: $y=\frac{1}{2}\left[(x_1-a)x-(x_1-a)x_1\right]+y_1$

. با توجه به شیب خط می‌توانیم این معادله را به‌صورت $y = tx - \frac{1}{2}[(x_1 - a)x_1] + y_1$ داشته باشیم.

فرض می‌کنیم: $u = -\frac{1}{2}[(x_1 - a)x_1] + y_1$ باشد، با جای‌گذاری در رابطهٔ (۱) و طبق t در رابطهٔ (۳) می‌بینیم: $u = \frac{1}{4}(x_1 - a)^2 - tx_1$. با به‌دست آوردن x_1 طبق رابطهٔ (۳) خواهیم داشت:

$$u = -t(2t + a) + t^2 \Rightarrow u = -t^2 - at$$

به‌طور مشابه، معادله برای سهمی با کانون $P_2(c,b)$ و هادی $L_2{:}x+c=0$ را می‌توان به‌صورت $4cx=(y-b)^2$ نوشت. مشابه قبل فرض کنید (x_2,y_2)، نقطه‌ای روی L_3 بوده و L_3 در این نقطه بر این سهمی مماس باشد. پس می‌توان نوشت: $4cx^2=(y_2-b)^2$. لذا خواهیم داشت: (۴) $x_2 = \frac{(y_2 - b)^2}{4c}$ (۴). با مشتق‌گیری ضمنی خواهیم داشت: $y' = \frac{2c}{y_2 - b}$ که شیب خط مماس در نقطهٔ تماس عبارت است از: $t = \frac{2c}{y_2 - b}$. با توجه به این رابطه می‌توانیم بنویسیم: $y_2 - b = \frac{2c}{t} \Rightarrow y_2 = \frac{2c}{t} + b(5)$ (۵).

معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ (x_2,y_2)، به‌صورت $y - y_2 = \frac{2c}{y_2 - b}(x - x_2)$ است و این رابطه را به این صورت بازنویسی می‌کنیم: $y = \frac{2cx}{y_2 - b} - \frac{2cx_2}{y_2 - b} + y_2$

اگر فرض کنیم $u = -\frac{2cx_2}{y_2 - b} + y_2$، با توجه به t و x_2 داریم:

$$u = \frac{2c}{t} + b - \frac{c}{t} = b + \frac{c}{t} \Rightarrow u = -t - at, u = b + \frac{c}{t}$$

$$\Rightarrow -t^2 - at = b + \frac{c}{t} \Rightarrow t^3 + at^2 + bt + c = 0, (c \neq 0)$$

وقتی c=۰ باشد، بدان معنی است که P_2 روی P'_2 قرار دارد. همچنین در این حالت t=۰ یا u=b است و داریم: $t^2+at+b=0$. همان‌طور که دیدیم، این اصل به حل معادلهٔ درجهٔ ۳ و در حالت خاص درجهٔ ۲ تبدیل می‌شود. در نتیجه می‌توان درک کرد که چگونه می‌توان این اصل را برای حل چنین مسائلی به‌کار برد.

نتیجه

در این مقاله با استفاده از اصول اریگامی به حل معادلات درجهٔ ۲ و ۳ پرداختیم. استفاده از اریگامی نسبت به روش‌های دیگری که در ریاضیات تاکنون برای حل این نوع معادلات به‌کار رفته‌اند، روشی شهودی‌تر و قابل لمس‌تر است. به کمک این روش توانستیم ارتباط جالبی بین حل مسائل ریاضیات و قوانین موجود در اریگامی بیابیم. با توجه به اینکه اغلب دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات مشکل دارند، آموزش مفاهیم ریاضی به‌صورت بازی، یادگیری را برای آنان شیرین و آسان می‌کند. با استفاده از این روش می‌توانیم دانش‌آموز را به‌طور مستقیم در فرایند آموزش و یادگیری درگیر کنیم و این امر کمک شایانی به معلم در هر دو فرایند می‌کند.

اغلب دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات مشکل دارند، آموزش مفاهیم ریاضی به‌صورت بازی، یادگیری را برای آنان شیرین و آسان می‌کند

***پی‌نوشت‌ها**

1. Rhode Island
2. Humiaki Huzita
3. Jacques Justin

***منابع**

1. K. Hatori, Origami construction, K's Origami, http://origami.ousaan.com/library/conste.html.
2. T. Hull, A comparison between straight edge and compass constructions and origami, Origami and Geometric Constructions, http://kahuna. merrimack. edu/ thull/om-les/geoconst.html.
3. Krier, Jaema L. "Mathematics and Origami: The Ancient Arts Unite." The University of Texas at Tyler. Math. Uttyl. Edu/athan/classes/senior-seminar/ Jaem. 2007.

چند عدد طبیعی y می‌توان یافت به‌طوری که 2^y+1 مضرب ۷ باشد؟

☐ الف) ۱

☐ ب) ۲

☐ ج) ۳

☐ د) ۴

☐ هـ) صفر